黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

「dy/dx は分数ではありません。だから『dx分のdy』と読んではいけません」と教わった高校生は

「高木貞治先生の『解析概論』37頁には『記号 dy/dx において dx および dy が各々独立の意味を有するから，dy/dx は商として意味を有する.』と書いてあるんですけど、知らないんですか?」

とつっこみを入れるべき。

twitter.com/genkuroki/status/8...

2017年04月29日 03:02 · Web · 4 · 7 · Webで開く

---

satie @satie on Apr 29
そうなんですけど、此れは勿論分数以上？を含むそれ以外の意味も？有して要るという事で微妙なのでそこを意識するために敢えて分数とは逆の読み方をしますよ♬ という風に言ってきたと思うが最近それでも、、、などと思うこともあり纏まらない。 @genkuroki

---

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on Apr 29
@satie 『解析概論』での dy/dx はもろに分数です。分数の極限なではなく、正確に分数(商)。dy の定義として「みもふたもない簡単に図示できる定義」を採用しているおかげでそうなっている。そしてその定義はそのまま微分形式入門になっています。

---

satie @satie on Apr 29
@genkuroki はいな。解析概論という限定が必要かどうかは兎も角（いやむしろ其処に言及しなければならないのかどうかは問題なのか？いやまぁだからこその「分数の極限ではなく」という話になるわけですね），$\frac{dy}{dx}$ はただの分数で良かろうとずっと思ってます。そういきたいところなのに教科書の記載と初心者への対応を考えるとって話なのでしょうね。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 16
mathtod.online/@yoh_okuno/1176...

確かに dy/dx は dy を dx で割ったものに誤差なしにぴったり一致するような設定にするのですが、dy も dx も普通の実数であり、さらに微小でなくてもいいんですね。例えば $dx = 100000000$ であってもよい。

その話題には
mathtod.online/@genkuroki/2686...
ですでに触れました。そこからツイッターでの説明のまとめにジャンプして読んで頂ければ詳しい事情がわかると思います。

補足：普通に集合と写像の言葉で厳密に実解析学の基礎を固めることができるだけのスキルを身につける前に「超準解析」とか言うのは無茶なので、この話題には超準解析は関係

ないとみなすのが妥当だと思います。

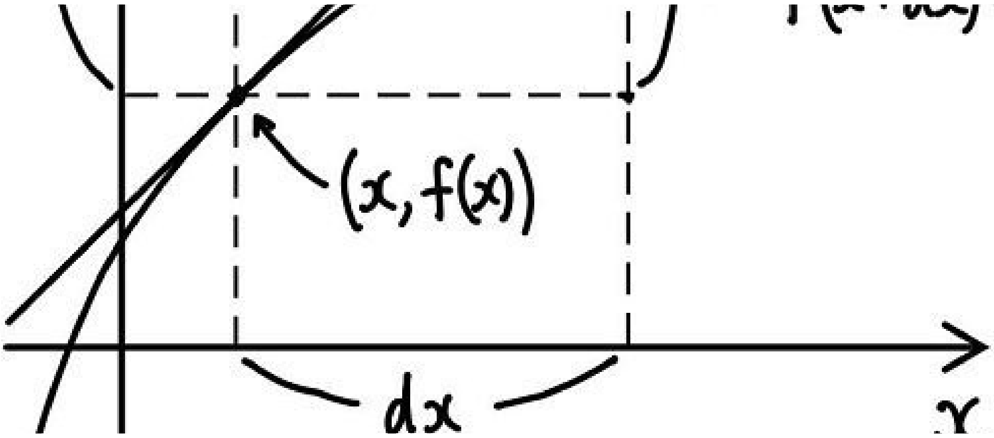
黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

私が書いた df と dx の図

df も dx も微小である必要は皆無でかつ、df/dx は微係数に誤差無しに一致しています。

この図を素直に一般化すれば自然に教科書にある(1次の)微分形式の定義が得られます。

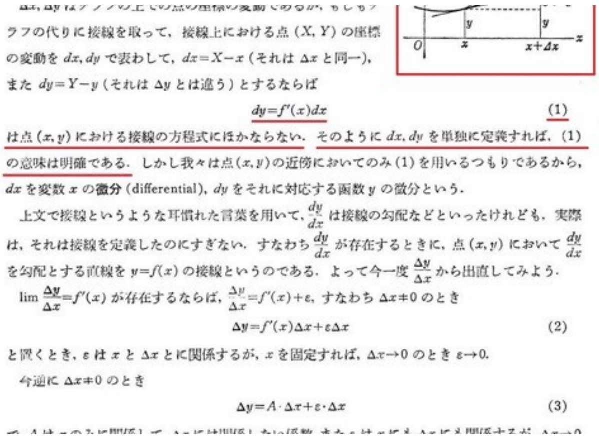
mathtod.online/media/9uiVUbD5Q…



黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

高木貞治さんも『解析概論』で同じ説明の仕方をしています。

mathtod.online/media/uTOG0Xstc… mathtod.online/media/IqTfyaFec…



ラフの代りに接線を取って，接線上における点 (X, Y) の座標の変動を dx, dy で表わして，$dx=X-x$（それは Δx と同一），また $dy=Y-y$（それは Δy とは違う）とするならば

$$dy=f'(x)dx \tag{1}$$

は点 (x, y) における接線の方程式にほかならない．そのように dx, dy を単独に定義すれば，(1) の意味は明確である．しかし我々は点 (x, y) の近傍においてのみ (1) を用いるつもりであるから，dx を変数 x の**微分** (differential)，dy をそれに対応する函数 y の微分という．

上文で接線というような耳慣れた言葉を用いて，$\frac{dy}{dx}$ は接線の勾配などといったけれども，実際は，それは接線を定義したのにすぎない．すなわち $\frac{dy}{dx}$ が存在するときに，点 (x, y) において $\frac{dy}{dx}$ を勾配とする直線を $y=f(x)$ の接線というのである．よって今一度 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ から出直してみよう．

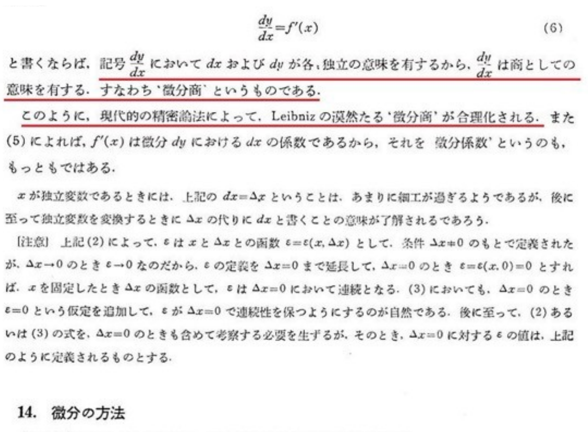
$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ が存在するならば，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$，すなわち $\Delta x \neq 0$ のとき

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x \tag{2}$$

と置くとき，ε は x と Δx とに関係するが，x を固定すれば，$\Delta x \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$.

今逆に $\Delta x \neq 0$ のとき

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x \tag{3}$$



$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \tag{6}$$

と書くならば，記号 $\frac{dy}{dx}$ において dx および dy が各独立の意味を有するから，$\frac{dy}{dx}$ は商としての意味を有する．すなわち‘微分商’というものである．

このように，現代的の精密論法によって，Leibniz の漠然たる‘微分商’が合理化される．また (5) によれば，$f'(x)$ は微分 dy における dx の係数であるから，それを‘微分係数’というのも，もっともではある．

x が独立変数であるときには，上記の $dx=\Delta x$ ということは，あまりに細工が過ぎるようであるが，後に至って独立変数を変換するときに Δx の代りに dx と書くことの意味が了解されるであろう．

［注意］ 上記 (2) によって，ε は x と Δx との函数 $\varepsilon=\varepsilon(x, \Delta x)$ として，条件 $\Delta x \neq 0$ のもとで定義されたが，$\Delta x \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ なのだから，ε の定義を $\Delta x=0$ まで延長して，$\Delta x=0$ のとき $\varepsilon=\varepsilon(x, 0)=0$ とすれば，x を固定したとき Δx の函数として，ε は $\Delta x=0$ において連続となる．(3) においても，$\Delta x=0$ のとき $\varepsilon=0$ という仮定を追加して，ε が $\Delta x=0$ で連続性を保つようにするのが自然である．後に至って，(2) あるいは (3) の式を，$\Delta x=0$ のときも含めて考察する必要を生ずるが，そのとき，$\Delta x=0$ に対する ε の値は，上記のように定義されるものとする．

14. 微分の方法

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

あと、field と field の要素を厳密に区別して説明する癖をつけておかないと、論理的に正確な説明ができなくなります。

例えば、1変数函数の実解析の文脈で dy/dx の dy, dx は実数だと考えてよいです。そして、実数は実数体と呼ばれるfieldの要素です。しかし、実数自体は決してfieldではありません。

私の教育経験では、学生が数学的に厳密な議論を違和感なくスムーズにできるようになるまでには、めちゃくちゃ努力して3年以上かかる感じです。結構、大変。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

数学科の卒業生として専門家だと社会的に扱ってもらえるレベルの数学を勉強を始めるためには、フルタイムで努力して3年以上かかる「数学的に正確に議論する能力」を身につける必要があって、本当に大変なことになっています。

3年待っていたら、勉強する時間が無くなるので、論理的なスキルが不完全なままで突っ走らないといけない。

「数学に膨大な時間をかけているうちに自然になんでもできるようになる」という経路以外で数学的に正確な議論をできるようになった人を見たことがありません。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

「接線の存在を所与とすればたしかに dy/dx は分数ですね。ただ微分を使えなかったら接線をどうやって定義するかわかりません」という質問を封じるために、すでに高木貞治『解析概論』を引用してあることに注意！

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

「微分を使えなかったら接線を定義できない」と思い込んでいると、多変数函数の(全)微分の定義ではまります。

「2変数函数について、偏微分を使えなかったら節平面を定義できない」となると困るので、高木貞治さんは1変数の段階で多変数でも通用するスタイル(実際には無限次元でも通用するスタイル)を採用しているわけです。

実2変数函数 $f(x,y)$ の微分可能性は、ある実数 a,b が存在して、

$$
\begin{gathered}
f(x+h,y+k) \\
= f(x,y) + ah + bk + \varepsilon(h,k), \\
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{gathered}
$$

が成立することだと定義されます。これは直観的には「接平面が存在する」という条件だと思って構いません。

そして、前者の式の1次の部分を $h = dx, k = dy,$

$$df = a\,dx + b\,dy$$

と書くわけです。

結果的に a, b は f の偏微分と等しくなります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

で、微妙な例として大学1年生向けの講義(数学科向けの特別な講義ではなく、教養としての数学の講義)で紹介される定番の例が

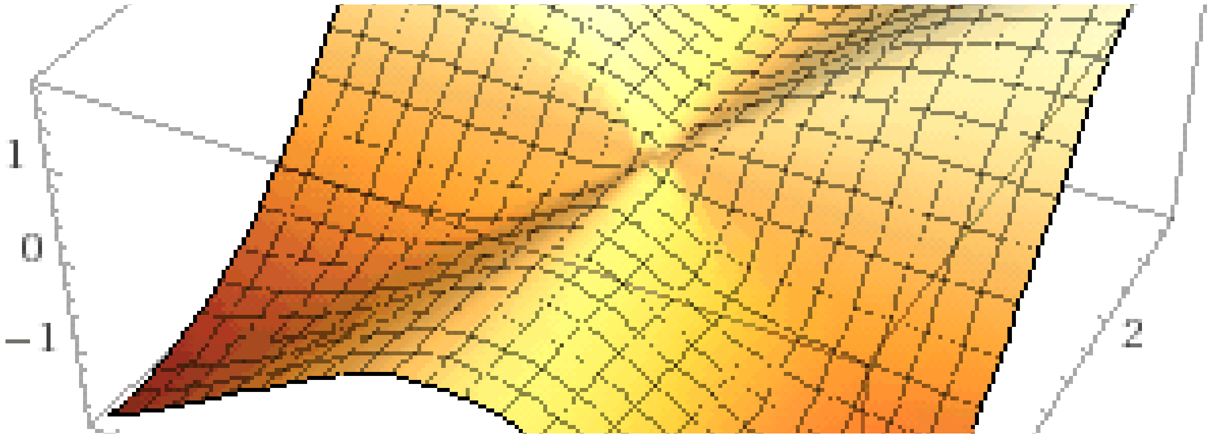
$$z = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

を原点まで連続に延ばして得られる函数です。原点で偏微分可能だが、微分不可能な例(接平面が存在しない例)になっています。

その様子を注意深く分析することは論理的に正確な議論を習得するためのよい訓練になっています。(この問題自体はつまらない。数学的に価値ある問題だと誤解されると困る。)

注意深く分析しなくても、コンピューターでグラフを描けば原点で何が起こっているかは一目瞭然です。

wolframalpha.com/input/?i=plot... mathtod.online/media/cLFv0eB-l...



黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

話をもとに戻すと、1階の微分を考えることは(何変数であろうが)、理系の訓練を受けた人ならみんな知っている「1次近似」を考えることに他なりません。

0次近似：

$$f(x+h)=a_0+\varepsilon_0(h)$$

で $|h|$ が小さなとき $|\varepsilon_0(h)|$ も小さいならば(すなわち $h\to 0$ で $\varepsilon_0(h)\to 0$ ならば)、$f(x+h)$ は $a_0=f(x)$ で0次近似されると言うことにします。0次近似可能性は連続性と同値です。

1次近似：

$$f(x+h)=a_0+a_1h+\varepsilon_1(h)$$

で $|h|$ が小さなとき $|\varepsilon_1(h)/h|$ も小さいならば、$f(x+h)$ は a_0+a_1h で一次近似されると言うことにします。1次近似可能性は微分可能性と同値で、そのとき $a_0=f(x)$,

$$a_1=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が成立しています。

この続きは高次の近似とTaylorの定理の話になります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

極限を取り切った状態で微分を定義するスタイルにこだわると、極限を取る途中の誤差がまだ残っている様子を忘れてしまいがちです。

実際にそうなってしまうと、厳密な解析学の展開においては致命的だし、現実への解析学の応用においても、応用時に必ず生じる近似の様子をイメージできないとアウトです。

論理的厳密性の観点からも、数学の健全な応用の観点からも、極限を取り切るスタイルで考えるのではなく、極限を取る途中の様子をきちんと理解しておくことは重要です。

解析学では

$$\begin{aligned}&(\text{調べたい量})\\&=(\text{よくわかる量})+(\text{誤差})\end{aligned}$$

という見方が基本です。微分の話もこの視点で整理すると分かり易くなります。

……という話を工学部新入生向けの講義でよくしています。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

2変数函数の微分可能性の説明で $=0$ を書き忘れていました。ただしくは、

$$\begin{aligned}&f(x+h,y+k)\\&=f(x,y)+ah+bk+\varepsilon(h,k),\\&\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\end{aligned}$$

です。

まあ、全部読めば何を忘れていたかはわかりますよね。

数学の解説を読むときには字面通りに読むと失敗することが多く、基本は全部自分で再構成すること。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

うごご、前野さんによる貴重な返答がローカルタイムラインに現われていない。もったいなさすぎ。

mathtod.online/@irobutsu/11804…
にアクセスして一番下の方に行けば見れます。

前野［いろもの物理学者］昌弘 @irobutsu on May 16

@genkuroki ローカルタイムラインに顕れないのはなんででしょね？？　返答にしたからかな（頭に. はつけたけど）。このあたりの仕様が実はよくわかってない。

前野［いろもの物理学者］昌弘 @irobutsu on May 16

twitterでやるみたいに「自分でブースト」してみたけどやっぱり現れない（最初、自分の発言はローカルタイムラインに出ないという仕様なのかと思ってた）。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

@irobutsu 自分個人に返答してもローカルライムラインに出るのですが、返答先に他人が含まれるようになると出なくなるようです。

そういう理由で、私はほぼ同じ発言を二重投稿する行為をすでに数回してしまいました。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 16

で、1次近似と微分の関係の話に戻ります。df は dx について線形で

$$f(x+dx) - f(x) = df + \varepsilon(dx)$$

($\varepsilon(dx)$ は dx が小さいとき dx より速く 0 に近付く1次近似の誤差)というスタイルで df を定義しているんですね。

すなわち、1次近似の線形項部分を df と書くことが通例になっているわけです。高木貞治『解析概論』もそうなっているし、他の多くの教科書もそうです。

そのスタイルは数学的に厳密であるだけではなく、非厳密だが伝統的な「無限小解析」のスタイルとも結構フィットしていて、全体的にバランスが取れた約束事だと思います。

頻繁に使われる

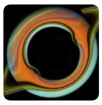
$$\begin{aligned}&(\text{調べたい量})\\ &= (\text{よくわかる量}) + (\text{誤差})\end{aligned}$$

のパターンでは「よくわかる量」の部分の表し方を決めておいた方が便利です。

1次近似における df はその典型例になっています。

Yoh Okuno @yoh_okuno on May 16

@genkuroki 接線の存在を所与とすればたしかにdy/dxは分数ですね。ただ微分を使えなかったら接線をどうやって定義するかわかりませんが…



前野［いろもの物理学者］昌弘 @irobutsu on May 16

. @genkuroki さんのと同様の図は私も自分の本に載せている。

この考え方だと、(x,y)のいる空間と$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$のいる空間は別（後者は接線上の座標）ということになって、$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$から$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$とかの計算は何の問題もない。

ただ、物理屋がよくやる、「xを$x+\mathrm{d}x$にすると変数がfから$f+\mathrm{d}f$に変化して」とか考えて微分方程式を立てていく流れとは少し相性が悪い（別の空間の座標だと思うと足し算$x+\mathrm{d}x$が気持ち悪い）ので、そっちの考え方ではやはり近似的に一致、みたいな話も必要になる。

mathtod.online/media/1MgeHg5-d…